Examen Électromagnétisme - PEIP 2
23 janvier 2018
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes collège standards autorisées

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9\ \mathrm{F.m^{-1}}$$

1. (7pts) **Questions courtes :**

   (a) Le champ électrique à proximité d'un point M d'une surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est $\vec{\boldsymbol{E}}(M) = 9\pi\left(3\vec{\boldsymbol{u}}_x + 4\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\mathrm{V.m^{-1}}$.

   i. Trouver l'amplitude du champ $\left|\vec{\boldsymbol{E}}(M)\right|$.

   ii. Trouver la densité surfacique de charge, $\sigma(M)$ en ce point.

   (b) **Forces de Laplace**

   i. Quand les forces de Laplace se manifestent-elles ?

   ii. Trouver la force de Laplace sur une tige de longueur l parcourue par un courant I et orientée sur l'axe Ox, $(\vec{\boldsymbol{l}} = l\vec{\boldsymbol{u}}_x)$, dans un champ magnétique constant $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0\left(\vec{\boldsymbol{u}}_x + 2\vec{\boldsymbol{u}}_y + 3\vec{\boldsymbol{u}}_z\right)$ (A.N. $B_0 = 3\mathrm{T}$, $l = 20\mathrm{cm}$, $I = 2\mathrm{A}$).

   (c) **Champ magnétique et induction :** On considère une bobine cylindrique, alignée sur l'axe $\vec{\boldsymbol{u}}_x$ de rayon $R = \frac{10}{\pi}\mathrm{cm}$, de longueur, $l = 10\mathrm{cm}$, et comportant $N = 1000$ tours. (Formules et applications numériques - démonstrations non nécessaires)

   i. Donner le champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}}$, à l'intérieur de la bobine quand un courant de $I = \frac{10}{\pi}\mathrm{A}$ circule dans la bobine (dans l'approximation de la bobine infinie).

   ii. Donner l'auto inductance, L, de la bobine dans l'approximation d'une bobine infinie.

   iii. Donner l'énergie magnétostatique stockée dans la bobine.

2. (5pts) **Champ magnétique et induction**

   (a) On considère un cadre carré de côté $a = 10\mathrm{cm}$, de résistance $R = 5\Omega$. Il est placé dans un plan z constant et soumis à un champ $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0\left(\vec{\boldsymbol{u}}_x + 2\vec{\boldsymbol{u}}_y + 3\vec{\boldsymbol{u}}_z\right)\cos(\omega t)$ ($B_0 = 1\mathrm{T}$, $\omega = 100\mathrm{Hz}$).

   i. Trouver le flux $\Phi_m(t) = \iint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}}$ à travers le cadre.

   ii. Trouver la force électromotrice $e(t)$, induit dans le cadre (A.N. sur l'amplitude).

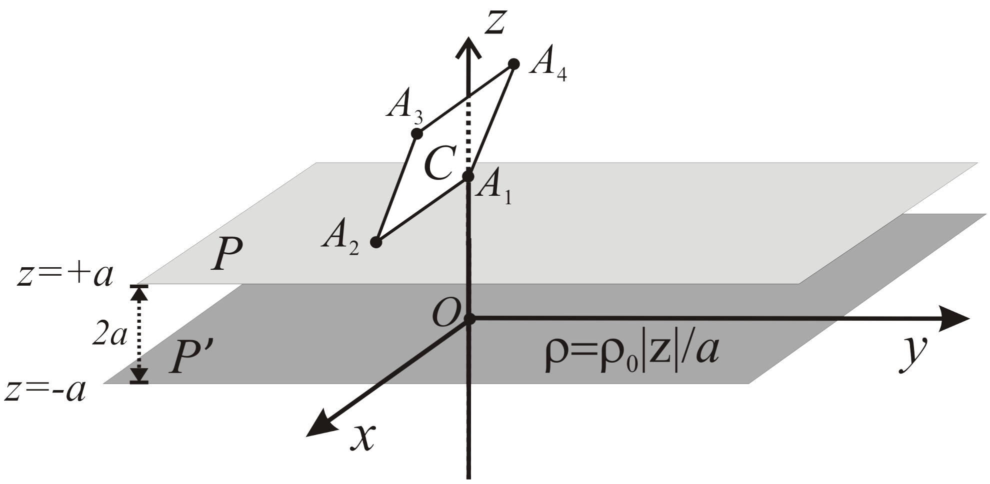
   iii. Trouver le courant induit $i(t)$, dans le cadre (A.N. sur l'amplitude).

   (b) On considère un potentiel vecteur de $\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{u}}_z A_0 \ln\left(x^2 + y^2\right)$. Trouver le champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}}$, associé.

   (Ca vous rappelle quel champ magnétique vu en cours ?)

(voir verso)

3. (5pts) **Électrostatique et Théorème de Gauss**
Soit un repère cartésien orthonormé direct et deux plans infinis (P) et (P') parallèles au plan xOy et ayant comme coordonnées respectives $z = +a$ et $z = -a$. Ces plans délimitent une région de l'espace chargée avec une distribution de charge volumique, $\rho(z) = \frac{|z|}{a}\rho_0$. Il n'y pas de charge surfacique dans ce problème et la densité de charge volumique à l'extérieur des plaques est nulle. (on ignore le cadre C dans ce premier exercice).



(a) Grâce, entres autres, à des considérations de symétrie et d'invariances :

i. Donner une expression générale du champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ en un point M quelconque de l'espace (pour cela, on analysera en fonction de quelles varaiables le champ peut varier et on déterminera sa direction).

ii. Expliquer, par arguments appropriés, que le champ électrique est nul en tout point du plan médian xOy et uniforme pour $z > a$ et $z < -a$.

(b) Grâce au théorème de Gauss, déterminer le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$, en tout point M dans les régions, $(z > a$ et $a > z > 0)$.
Faire une représentation graphique résumant les résultats trouvés.

(c) Exprimer le potentiel électrique du système, $V(z)$, en fixant $V(0) = 0$ dans le plan $z = 0$. Faire une représentation graphique.

4. (5pts) On continue avec le même système que dans l'exercice précédent.

(a) Dans la limite $\frac{a}{z} \to 0$, on peut assimiler la région de l'espace entre $z = -a$ et $z = a$ d'épaisseur $2a$, à une charge surfacique, σ_0 d'épaisseur négligeable. Trouver l'expression de σ_0 (en fonction de ρ_0 et de a).

(b) Un cadre carré, C, d'arête de longueur $2a$, est placé de façon telle que ses sommets A_1, A_2, A_3, A_4 aient les coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2a + a\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 2a + a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On oriente le cadre dans le sens $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$.
Trouver le vecteur normal au cadre (dans l'orientation choisie) à partir du produit vectoriel $\vec{\boldsymbol{n}} = \overrightarrow{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3}$. Montrer que le vecteur normal unitaire $\hat{\boldsymbol{n}}$, a pour composantes dans la base $(\vec{\boldsymbol{u}}_x, \vec{\boldsymbol{u}}_y, \vec{\boldsymbol{u}}_z)$,

$$\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\vec{\boldsymbol{n}}}{|\vec{\boldsymbol{n}}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Calculer le flux électrique $\Phi_e \equiv \iint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}}$ à travers le cadre (sachant que la surface du cadre est $S = 4a^2$).